「逆を吟味する問題　～各行を必要十分条件を意識して見てみると～」

埼玉県立熊谷女子高等学校　丸木和彦

（発旨）教科書を解いていると，答が出た後に逆を吟味している問題がある。「恒等式を数値代入法で解く問題」「軌跡の問題」「極値の問題」などである。生徒は、なぜ？と疑問に思うこと必然である。そこで，一行一行を丁寧に調べていくと途中で「十分条件」になっている箇所に気づく。また，２つの条件を合せると必要十分条件になっている箇所もある。今回は，これらの問題をとおして行間を意識する重要性を考察してみたい。

第１節 値を代入して係数を決定するとき

恒等式の場合、すべての値で成り立つことを利用して、係数を決定する方法がある。(数値代入法)
このとき、その数値で与式が成り立つことは保証しているが、恒等式であることはまだ保証されていないので、十分姓の確認する必要がある。その方法としては、以下の２通りが考えられる。

【方法１】十分性をきちんと確認する
求めた値を与式に代入して、左辺と右辺が一致することを確認する（ほとんどがこの方法）

【方法２】n 次式の性質に関する定理を使う
$P(x), Q(x)$ を x についての n 次式とする。このとき，$P(x)=Q(x)$ という等式が異なる $n+1$ 個の x について成立するならばそれは恒等式である。
（証明は因数定理を利用）
この定理を使えば、例えば２次式であれば、値を３つ代入して成立するならば，それは恒等式であることをいうことができる。
次に、具体例で考察していきたい。

> 問題１．(数値代入法)
> 等式 $x^2+x-6=a(x+1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

【解答】与式は x についての恒等式だから，$x=-1$, $0,\ 1$ を代入して，

$$\begin{cases} -2b+c=-6 \\ a-b+c=-6 \\ 4a+c=-4 \end{cases}$$

これを解いて，$a=1,\ b=-1,\ c=-8$

＜逆に＞
$a=1,\ b=-1,\ c=-8$ のとき，
（右辺）$=(x+1)^2-(x-1)-8=x^2+2x+1-x+1-8=x^2+x-6$
となり，左辺の式と等しくなるので，与式は恒等式となる。
よって，求める値は，

$$a=1,\ b=-1,\ c=-8$$

※ ここでは【方法①】を使って逆を確認した。この式が恒等式か方程式かをはっきりさせるためである。単に２次方程式の解であった可能性もあるので，それ以外の値でも成り立つことを確認している。ただし，【方法②】でも述べたとおり、３つの値を代入して，係数を決定しており、恒等式に確実になるので、逆の確認はいらないという意見もある。

第２節 軌跡の問題

逆の吟味を考える問題でよく登場するのが「軌跡」の問題である。具体的な例を使って見ていきたい。

> 問題２．（軌跡の問題（１））
> 平面上の２点 A(－２，０), B(４，０)に対して，AP：BP＝２：１を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

【解答】点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。

AP：BP＝2：1 より, AP＝2ＢＰ	(I)
両辺を２乗して，$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$	(II)
$(x+2)^2+y^2=4\{(x-4)^2+y^2\}$	(III)
$x^2+y^2-12x+20=0$	(IV)
$(x-6)^2+y^2=4^2$　・・・①	(V)

したがって，与えられた条件を満たす点Ｐは①上にある。

＜逆に＞

①上の任意の点は与えられた条件を満たす。

よって，求める軌跡は，中心(６，０)，半径４の円

※ 教科書にも載っている「アポロニウスの円」に関する問題である。教科書では，「手順を逆にたどることによって成り立つことが明らかなときは省略してよい」と書いてある。式変形が同値である場合は分かるが，(今回は、(I)～(V)を考察すれば同値であることがわかる)それ以外の場合において，省略可能なときの境界線があいまいな気がする。結局は，生徒は、逆を書かないことが多い。そのような習慣がついてしまうと、次のような問題を解くと痛い目にあう。

問題３．(軌跡の問題（２))

２直線 $kx-y=0$　　・・・①,

$x-2+ky=0$　・・・②

がある。k の値が変化するとき，２直線①，②の交点の軌跡を求めよ。(フォーカス･ゼータ数学 IIB)

【解答】２直線①，②の交点は①，②の両方を満たすので，①，②より k を消去した式も満たす。すなわち

①×y −②×x より

$x(x-2)+y^2=0$ ・・・③

を満たす。

③を答にしてしまうと、〇はもらえない。ここまでの意味は，２直線①，②の交点すなわち，①，②をともに満たす点はすべて図形③上にあるという意味である。問題は①，②の交点が図形③上のすべての点をつくしているかが問題です。逆を考えてみると・・・

＜逆に＞

円③上の点をP(x_0,y_0)とする。

$x_0\neq 0$ のとき　$k=\frac{y_0}{x_0}$ とすると，

$x_0-2+ky_0=x_0-2+\frac{y_0}{x_0}=\frac{x_0(x_0-2)+y_0^2}{x_0}=0$

よって，P(x_0,y_0) は２直線①，②の交点である。

$x_0=0$ すなわち原点のときは，②が原点を通ることはないから，原点は含まれない。

したがって，求める軌跡は、円 $(x-1)^2+y^2=1$ より原点を除いたものである。

※ この問題は逆を吟味することにより、原点を除くことに気づいた。このように，図形全体ではなく、図形の一部分が軌跡になり得るので注意したい。

次の問題は、熊谷高校の韮塚先生に紹介していただいた数学Ⅲの２次曲線に関する問題である。教科書では、逆の吟味が省かれているが、逆をしっかりと示せる生徒は少ないのではないだろうか。

問題４．軌跡の問題（３))

極方程式 $r=\frac{3}{1+2\cos\theta}$ で表される曲線を直交座標の方程式で表し、それがどのような曲線であるか調べよ。

教科書などでは、次のように書かれている。

【解答】分母をはらって整理すると

$r=3-2r\cos\theta$　　・・・①

となる。この両辺を２乗すると，

$r^2=(3-2r\cos\theta)^2$　　・・・②

$x^2+y^2=(3-2x)^2$

$3x^2-12x-y^2+9=0$　　・・・③

したがって，$(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$

となり $r=\frac{3}{1+2\cos\theta}$ の表す図形は双曲線であることがわかる。

教科書では、これしか書かれていないが、①から②は必要条件であって、十分条件ではないので逆の吟味が必要である。

＜逆に＞

③が成り立つとき，$x^2+y^2=(3-2x)^2$

$r^2=x^2+y^2$ であるから　$r^2=(3-2x)^2$

したがって，　$r=\pm(3-2x)$

すなわち　　$r=3-2r\cos\theta$　　・・・④

または　$r=-(3-2r\cos\theta)$　　・・・④´

④´から　$-r=3-2(-r)\cos(\theta+\pi)$

点$(r\ ,\theta)$と点$(-r\ ,\theta+\pi)$は同じ点を表すから，④と④´は同じ図形を表す。($r<0$ の極座標の定義より)

よって，③上の任意の点は，④より $r=\frac{3}{1+2\cos\theta}$ を満たす。

$r<0$ の極座標の定義が活用できる場面でもあるので，意識が高い生徒には，この逆の確認も紹介していきたい。

第３節　２乗して考える問題

先ほどの問題もそうであるが、２乗すると必要十分条件が崩れることが多い。「平方の大小比較」などが代表的な例であるが、「無理関数と直線との共有点の座標」を求めるときなどにも登場する。生徒もよく間違える問題である。

問題５．（途中で２乗する場面が出てくる問題(1)）
$y=\sqrt{x+2}$ と $y=x$ の共有点の x 座標を求めよ。

【解答】共有点の x 座標は，次の方程式の解である。

$\sqrt{x+2}=x$　・・・①

①の両辺を２乗して整理すると，

$x^2-x-2=0$

これを解くと，$x=-1,\ 2$

【逆に】

$x=-1$ のとき，①は満たさない。

$x=2$ のとき，①は満たす。

よって，求める共有点の x 座標は，　$x=2$

最初に，無理関数の定義域を確認すれば済む話であるが，両辺を２乗して話を進めていく場合は，必要十分条件が崩れているので，最後に必ず確認する習慣をつけさせていきたい。

第４節 極値に関する問題

極値の問題でも，逆を意識する場面がある。それが，次の定理に関する問題である。

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で極値をとる
$\Rightarrow$　$f'(a)=0$

逆が成り立たないことは，教科書にも載っている。このタイプの問題も，各行を見てみると同値関係が崩れている箇所がある。こうした箇所を見つけるのも，生徒にとってよい勉強になると思う。

問題４．（極値(1)）
関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ が $x=1$ で極値-1 をとるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

【解答】$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=1$ で-1 の値をとるから　(I)

$f(1)=-1$　(II)

よって，$a+b+5=-1$　・・・①　(III)

また，$f(x)$ は $x=1$ で極値をとるから　(IV)

$f'(1)=0$　(V)

よって，$3+2a+b=0$　・・・②　(VI)

①,②を解いて，$a=3,\ b=-9$

＜逆に＞ $a=3,\ b=-9$ のとき，

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

となり，増減表を書くと，$f(x)$ は $x=1$ で極値-1 をとることがわかる。

以上より　$a=3,\ b=-9$

同値関係が崩れている行は，(IV)から(V)になるときである。よって，この問題は，答が出たら逆を確かめなければならない。この問題だから逆を確かめるというような条件反射的に解答を覚えさえるのではなく，なぜそれをしなければならないのかの方が重要であると考える。しっかりと，

「 $f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限らない」

とぃう事実を生徒には理解させたい。

値が存在しない例を一つ紹介したい。

問題５．（極値(2)）
関数 $f(x)=x^3-6x^2+ax$ が $x=2$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

$f'(2)=0$ を解くと，$a=12$ が得られるが，このとき，

$f'(x)=3(x-2)^2>0$

となり，$x=2$ 極値を持たないことがわかる。

よって，この条件を満たす定数 a は存在しないことがわかる。もし，生徒が納得していないようなら，このような例を提示して，実際に成り立たないことを確認させたい。

第５節 極限値をもつ条件に関する問題

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=0$$

この定理も，必要十分条件ではないので注意したい。

次の問題で確認する。

問題６．（極限値をもつ条件）
極限値 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}$ が存在するように定数 k の値を定めよ。

【解答】 極限値 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-k}{x-1}$ が存在するとき，

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから，$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-k\right)=0$

したがって

$\sqrt{1+3}-k=0$ より，$k=2$

【逆に】このとき，

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}$ となり，$k=2$ で極限値が存在する。

よって， $k=2$

生徒にとって，なぜ逆を書く必要があるのか疑問に思うかもしれません。ここで重要なことは，解答の１行目の「極限値が存在するとき」です。極限値が存在すると仮定すると，$k=2$ の値となるということがわかったので，仮定である極限値が存在することを確認しないといけない。だから，実際に値を代入して極限値が存在することを示している。このような流れを理解することが，数学の本質を理解することにつながるのではないだろうか。

第６節 中間値の定理に関する問題

中間値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間$[a,\ b]$で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，$f(x)=0$ は，$a<x<b$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつ。

この定理も必要条件であって，十分条件ではないので，逆は成り立たない。

例えば，次の２次関数の問題で考えればイメージしやすい。

問題７．（解の存在）
x の２次方程式 $x^2+ax+a^2-3=0$ が $-1<x<\frac{3}{2}$ の範囲に少なくとも１つの実数解を持つような実数 a の条件を求めよ。

この問題を中間値の定理を使って，次のように考える生徒もいると思う。

【解答】閉区間 $[-1,\frac{3}{2}]$ で x の２次関数

$f(x)=x^2+ax+a^2-3$ は連続である。

中間値の定理より $-1<x<\frac{3}{2}$ の範囲に少なくとも１つの実数解を持つ条件は，$f(-1)$と $f\left(\frac{3}{2}\right)$ が異符号になることであるから，

$$f(-1)f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

・・・・

これを解くだけでは，正解にはならない。

$f(-1)$と $f\left(\frac{3}{2}\right)$ が同符号でも，$-1<x<\frac{3}{2}$ の範囲に実数解を持つからである。このように，必要十分条件ではない定理は，使うときに注意が必要である。

まとめとして・・・

今回は，逆の吟味に関して考察した。逆を考察する場合とそうでない場合の違いは何かに注目すると，数学の本質に辿り着くことがある。普段から，式変形などをする際には，その変形は同値変形なのか，それとも必要条件になっているのかを意識する習慣をつけていきたい。

参考文献
１．「数学Ⅱ　改訂版」啓林館　藤田岳彦編
２．「数学Ⅲ　改訂版」啓林館　藤田岳彦編
３．「フォーカス・ゼータ　数学ⅡＢ」啓林館