

問題解決のための歴史的な道具たち

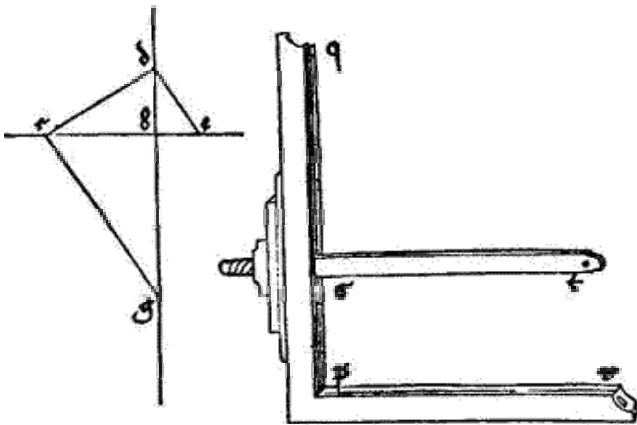
埼玉県立蕨高等学校 田端 毅

数学史上に現れる、問題を解くために考え出された道具、装置のいくつかを紹介する。その際、その構造、仕組みに注目し、操作を通してその背景にある数学を体験していきたい。本稿ではまず古代ギリシャ数学の3大問題のひとつである立方体倍積問題の鍵となる比例中項を求めるための方法、器具を紹介する。次いで3次方程式の解答機を提示する。

A 比例中項を求める問題

2枚のL字(直角)定規による方法

プラトン(BC427~347)、デューラー(1471~1528)の直角三角形



A. Dürer デューラー, Underweysung der messung 「測定法教本」, 1525
図の装置は比例中項の問題、すなわち、「与えられた長さを持つ2本の線分 OA, OB の間に2本の比例中項の長さを持つ線分を見いだす問題」の解答を示すことができるものである。

操作手順

線分 OA(=a)が与えられている。

直交する軸 X,Y を引く。

単位長さ OB(=1)を Y 軸上にとる。

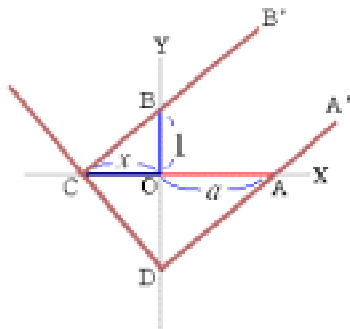
図のデューラーの器具を

A'D は A を通り, D は Y 軸上に置き、

さらに C は X 軸上, CB' 上に B がある。

そのように CD の長さ、D の位置を調整して設置する。

この時、OC の長さが OA(=a) の3乗根を与える。



[理由]

$$OA : OC = OC : ON = ON : OY \\ = OY : OB$$

よって

$$OA = a, OB = 1, OC = x, OD = y$$

$$1 : x = x : y = y : a$$

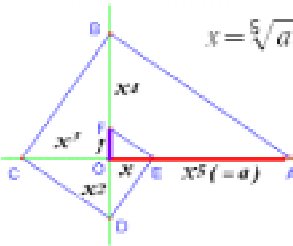
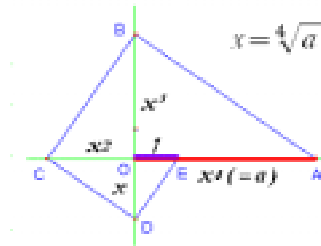
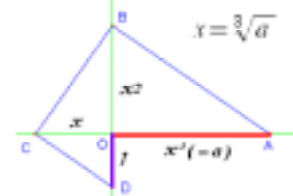
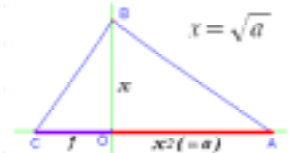
$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = ax \end{cases}$$

$$\therefore x^3 = a$$

$$\text{すなわち } x = \sqrt[3]{a}$$

この方法は連続した相似な直角三角形の性質である。このことを発展させれば n 乗根の値を図示することが出来る。

勿論、n 乗根を作図することは出来ない。完成された図において相当する部分、値を示すことが出来るという意味である。



これと同様の方法が規矩術にある。曲尺2本を使用する開立法で次のように行う。

操作手順

線分 OA(=a)が与えられている。

直交する軸 X,Y を引く。

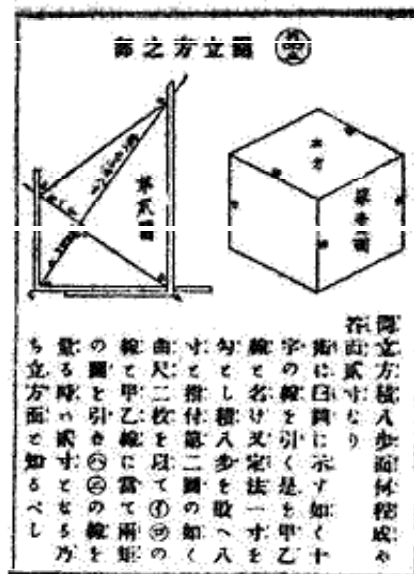
単位長さ OB(=1)を Y 軸上にとる。

曲尺1は角Cを X 軸上に置き、B を通る。

曲尺2は角Dを Y 軸上に置き、A を通る。

その際、辺 CD が共有されるように曲尺の位置を調整して設置する。

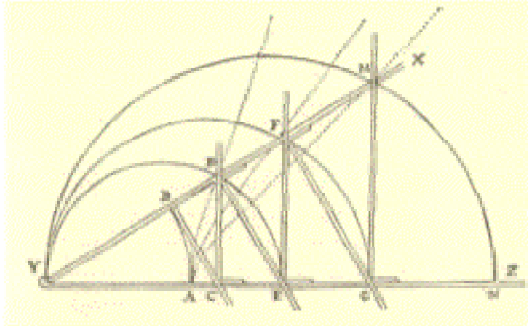
この時、OC の長さが OA(=a) の3乗根を与える。



「曲尺調法記」18 c

デカルト(1596~1650)のメソッド

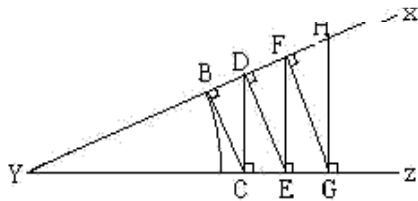
17世紀初頭、デカルトは「思索私記」(1619)中にいくつかの数学器具を示している。その中に多数の比例中項を見いだすためのものがある。



デカルトのメソッド(幾何学 第II巻：遷移の研究)

この装置は任意の幾何的数列 x^n の長さの作図を示すことが可能であり、これを用いて3次方程式を解くことが彼の目的であった。

この装置は XYZ を作る2本の定木 XY、YZ および連続した相似な直角三角形を作る定木によって作られる。YB を単位とし、定数を CE にとる。このとき、その値に応じて図のように C ~ G の各点が運動して相似な直角三角形を形作するようになっている。



このとき YC が3次方程式 $x^3 = x + CE$ の解を与える。

この装置の本質は相似な直角三角形から次のような連続した比例を見いだすことができる点にある。

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH} = \dots$$

ここで YB (=YA)=1 YC= x とおけば次の幾何的数列の連続比を得る。

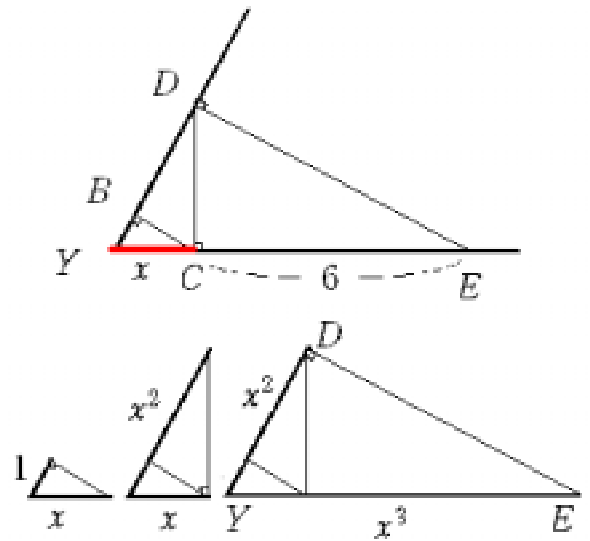
$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \dots$$

すなわち $YD = x^2, YE = x^3 \dots$
 よって $CE = YE - YC = x^3 - x$
 ゆえに $x^3 = x + CE \dots *$

従って、CE の値に応じてこのコンパスの幅を決めれば YC (= x) が * の3次方程式の解となる。

* 彼はその文中に於いて次の2点について提唱している。
 代数的手続きによる、幾何学の図形操作の自由化
 幾何学的解釈を通じて、代数演算に意味を与える

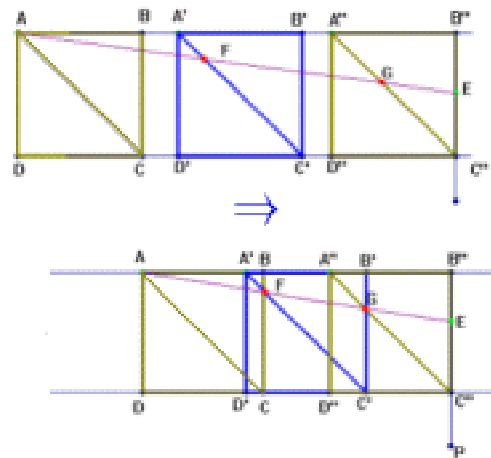
ex $x^3 = x + 6$ の解



$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3$$

ゆえに $YE = x^3 = x + 6$

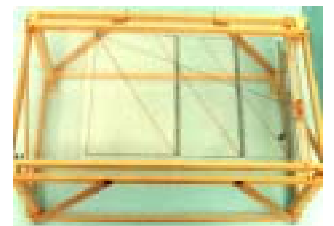
エラトステネス(BC275~194)のメソッド



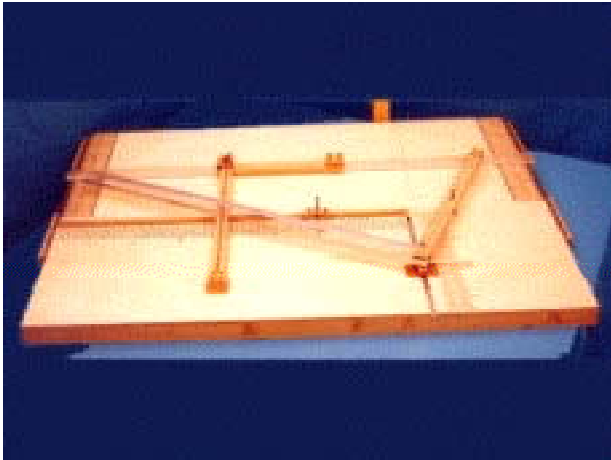
図のような長方形の枠3つを使ってここまでと同様に直角三角形の相似を組み合わせると比例中項を見出している。

この場合 $DA : FC = FC : GC' = GC' : C''E$
 よって $AD = 1, C''E = a$ とすれば FC は a の3乗根となる。

右図版では3枚のガラス板をスライドすることにより、簡単に条件を満たす状況を作り出せるように工夫されている。



B 3次方程式の解答機
ボンベリ(1526~1572)の定規

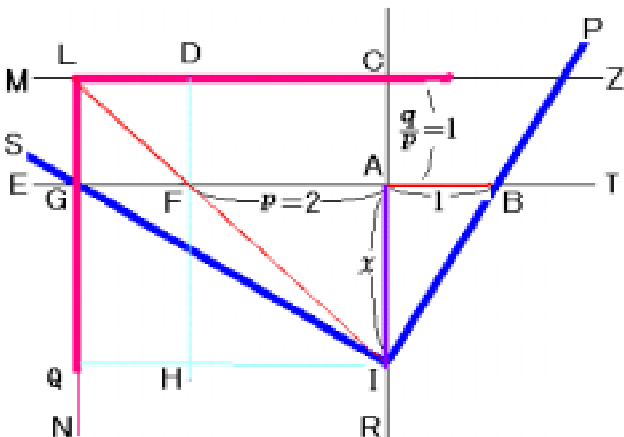


操作手順

- * ET、AR を引く
- AF=p、AB=1 となる点 B、F をとる
- ET から距離 q/p である平行線 MZ をひく
- IP が B を通り、I は AR 上に来るように L 定規 SIP をセットする
- の L 定規 SIP の SI と ET との交点 G を NL が通過し、LD は MZ 上におく。
- 2本の L 定規を LFI が一直線上に並ぶように調整する。

このようにおいたとき、AIの長さが
方程式 $x^3 = px + q$ の解 x となる。

ex $x^3 = 2x + 2$ の解



[理由]

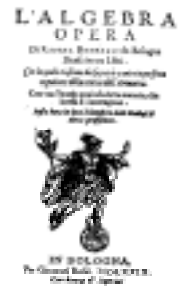
GBI は直角三角形であるから $AB=1, AI=x$ とおくと
IAB GAI より $AG = AI^2 = x^2$
ここで、ET に平行で I を通る直線と、AR に平行で G を通る直線との交点を Q とおく。
すると、長方形 AGQI の面積は x^3 となる。
また、AR に平行な F を通る直線と QI との交点を H とおく。
ここで $AF=p$ とすると、四角形 AFHI の面積は px となる。
従って ACDF と GQHF の面積は等しいので
 $AGQI = AFHI + FGQH$ より $x^3 = px + q$

*ボンベリ R. Bombelli (16C) Italy, Bologna



ボンベリはデ・イオファントスの方法を研究し、その影響の下に Algebra「代数学」を著した。(1572) そのなかで3次方程式 $x^3 = px + q$ の幾何的な解法を示している。(但し、この部分を含む後半部分は公には未完に終わった。)

もっとも、彼の業績として最大のもはその著書中において、負数の平方根の取り扱いについて整理したこと。そして、当時最新の方法であったカルダノ-タルタリアの解法について複素数による表記を交えてその仕組みを明らかにしたことといわれている。

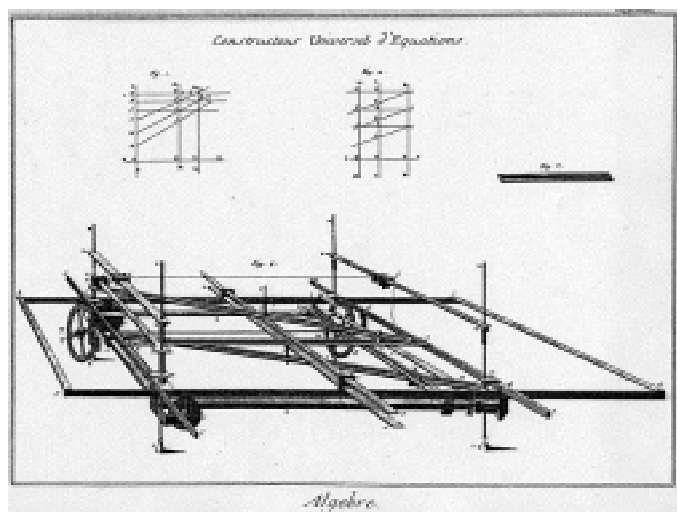


17世紀半ば過ぎの時点にあっても、数学の正統的形態は幾何学的なものと考えられていた・・・
厳密性を重視しようとする数学者にとって、代数解析的数学は未だに正統性を獲得していなかった。
(数学史入門 佐々木 力)

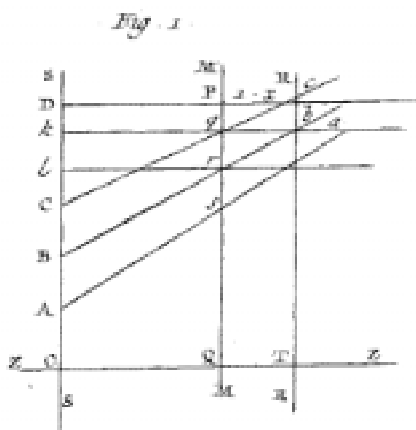
3次方程式の幾何的な解法は11世紀にアル・アル・ハイミーが、また12世紀にはアットゥーサイにより記号法に依存しない3次方程式論が展開されている。

デカルト以降、ようやく幾何的な解法と代数的な解法の混在から脱却し始めるのである。

*百科全書(19c 仏.) 図版集中の
 ”汎用代数方程式解答機”
 costruttore universale di eqazioni



有名なフランス百科全書図版集中に汎用方程式の解答機として名されているものである幾何学的な解法を歯車つきの装置として提示している。



図版上部にある説明図

16世紀以降、実用的な沢山の数学的な道具が世に出ている。例えば透視図法の装置、拡大縮小機などの製図、描画のための器具がある。これらは始めは画家や建築家等の純粋な要求に応えるために産み出されたものである。それらが後に射影幾何に発展し、あるいは画法幾何、解析幾何といった新しい数学の後押しとなっていた。
 また、一方に置いて、これらの装置はその実用性、すなわち実際に解を目に見える長さで示したり、解曲線を描き出すことによって問題解決をしてくれることはおおいな有用性を持っている。例えばガタノの3次方程式の解とポンハリの解のどちらが一般の人々に受け入れられるの

か。また、実際に現場で立方根の値の欲しかった大工にとって必要な方法はどのようなものであるのか。人間の实感覚に沿った、温もりのある数学がそこには存在している。実体験(感覚)の伴わない理論や知識は少なくとも大多数の人間にとって受け入れがたいものであろう。

C 最後に

「問題解決のための歴史的な道具」として、まず比例中項を導く道具、そして、それに続く3次方程式の解を示す装置を紹介しました。これらは皆、長い年月の間、沢山の人が様々な工夫を凝らして産み出したものです。歴史的な装置道具を実際に装置を作り、体験し、その手法、感覚に浸ること、そのような数学的な経験は結論のみを知識として受け入れることに比べはるかに大切な要素を含んでいます。現代に置いてはコンピュータを利用することによってこれらの装置、操作をシミュレーションをし、再生することは可能ではありません。しかし、実際に作り、操作することは机上の思考は勿論、ディスプレイ画面から受け取れる情報以上のものを含んでいます。実物にはかないません。本稿の意図はまさにそこにあります。手にとってあれこれためして、楽しむことがそこにある数学的内容を身近なもの、自分のものにしてくれます。「数学実験」をもっと身近に置いてみませんか？
 また、1枚の図版を眺めてそこからどんな音楽(数学)が流れてくるのか、結論を急がず、あれやこれやと考えるのもなかなか楽しいものではないでしょうか。

参照文献

- ・デカルトの数学思想 佐々木 力 東京大学出版会
- ・ロシュディーラーシュッド「アラビア数学の展開」東京大学出版会
- ・ファンデルヴェルデン「代数学の歴史」現代数学社
- ・ギリシャ数学史 ヒース 平田寛他訳 共立出版
- ・カジヨリ「初等数学史」(上下) 共立全書
- ・東西数学物語 平山諭 恒星社厚生閣

参照URL

- ・ <http://www.museo.unimo.it/theatrum/>
 イタリア ヴェナ大学数学教育研究室のサイト:数学博物館です。
- ・ <http://www.library.pref.osaka.jp/France/France.html>
 大阪府立中央図書館。フランス百科全書図版集が公開されています。
- ・ <http://math.criced.tsukuba.ac.jp/museum/>
 筑波大学数学教育研究室のサイトです。歴史的な道具を用いた、沢山の研究事例が載っています。