1−③（第１分科会　数学史）

Fermatの最終定理が解けた！～埼玉の数学者　谷山豊をめぐって～　　その１２

埼玉県立熊谷高等学校　奥原　浩

okuhara.h@school.spec.ed.jp　okuhara.h@gmail.com

（要旨）"Annals of Mathematics"１９９５年の5月号に"Moduler elliptic curves and Fermat's Last Theorem"(by Andrew Wiles)と"Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras"(by Richerd Tayler and Andrew Wiles)と言う2論文が掲載されました。それから１０年余り。ここでは、すこし詳細に歴史的変遷を辿ろうと思います。

1. はじめに

今回は、Fermatの最終定理（以後FLT)までの道のりで登場する歴史上の数学者をあげて、FLTに関係した成果を紹介します。今回ここに登場する人物は、古い順に、Euclid(B.C.300頃),Diophntaus(A.D250頃) Fermat(1601-1665),Euler(1707-1783),Lagrange(1736-1813),SophieGerman(1776-1831),Gauss(1777-1855) Cauchy(1789-1857),Lamé(1795-1870),Dirichlet(1805-1859)Liouville(1809-1882),Kummer(1810-1893), Taniyama(1927-1958),Shimura(1930-),Frey(1944-) Ribet((?)-),Wiles(1953-)　です。

2. Fermat以前

Fermatが FLTに至る前まで、またはFLTに至るための契機になった歴史的流れはどのようなものだったのかを見てみましょう。

まず始めは、やはりEuclidです。Euclidは、B.C. 300年頃に生きた数学者で、現在のエジプト第2の都市アレクサンドリアで活躍したとされています。プトレマイオス（トレミー）１世の時代に生きたということです。ただし、まことしやかに語られている有名な逸話（「幾何学に王道なし」）は、時代が下ってから作られたと言う可能性が大きいようです。この逸話とは、「幾何学を簡単に学べる簡単な方法はないか」、と聞いたプトレマイオス１世に対して、Euclidは「幾何学に王道無し」と答えた、というのですが、これは、プロクロス(A.D.410-A.D.485)という数学者(?)がユークリッドの「原論」を解説した「ユークリッド『原論』第１巻注釈」の序論（にタレスからユークリッドに至る記述があるのですが）の中で記されているものです。しかし、これが、Euclidの後700年程してから書かれているものであり、また、A.D.5世紀頃に生きたストバイオスの記述には、まったく同じ内容がメナイクモスとアレクサンダー大王の会話としてる伝えられています。このことから考えても、この話は、後世の作られた逸話と考えるのが正解のようです。

このように、古い時代のものは、どんなものでも、書き換えられることが多いと思われます。これは、「原論」にも言えることでしょう。従って、現在伝わっている「原論」がオリジナルのものとどれほど隔たっているかと言うのは、よくわかりません。本当のことを知るには、数学史家の研究成果を見るしか方法はありません。

さて、Euclidが残した代表作「（幾何学）原論」（全13巻）のなかで、整数論に関するものは第7巻～第9巻の3巻とされています。第7巻では約数・倍数・素数・最大公約数・最小公倍数について、第8巻では比例論が再考され、第9巻でピタゴラス派の数学が再現されている、と言うのが有力のようです。さらに詳しく内容を見てみると、注目される内容は

① 素数が無限にあることの証明

② 最大公約数の求め方（ユークリッドの互除法）

③ 「ピタゴラス数」を求める方法

④ 偶数の完全数の性質

などが上げられます。そこでの説明・証明の方法は具体例を利用しそのアルゴリズム（求め方）を示すというものです。図形を使って以上の内容を解明していったことは、現代の我々からするととても難解なことのように思いますが、位取り記数法やインドアラビア数字・文字式が無い時代のことだから、図形を使う方法は大変有効なことだと思います。それにしても、そんな時代にこれだけのことをなした先人たちの偉大さには驚嘆するしかありません。

Euclidに続いて取り上げるのは、やはり現在のエジプト、アレクサンドリアで活躍したDiophantausです。生没年は不詳ですが、A.D.250頃活躍したという記録が残っているようです。彼の名は、今だに、整数論やそれ以外の関連分野で、DIophantaus方程式やDiophantaus近似という名称の中に残っています。古

代からすると、使う道具は変わってきていても、現在も数学のいろいろな分野で盛んに研究されている対象の一つだといえると思います。この Diophantaus が残した"Arithmetica"と言う本が、FLT を生み出す直接のきっかけになったのですが、少しその内容を見ていきましょう。まず、構成です。もともとは全 13 巻でしたが、現存して伝わっているのは6巻より多いものは無いとされています。A.D.10世紀頃には、すでに現存しない巻は失われていたようです。内容は、この当時、数字の記法や数式は現在とは段違いの扱い難さだったにもかかわらず、代数学を対象としました。

I. 定方程式（解が確定的に求まる方程式）
   (ア) 1次・2次方程式は、多くの例を楽々と解いていました。
   (イ) 2次方程式の解法はこの頃にはもう完全に得られていたものと思われます。
II. 不定方程式（解が確定的に求まらない方程式）
   (ア) 1次方程式
      全く触れられていません。
   (イ) 2次の不定方程式
      非常に一般的な形に近いものを扱っています。
      解法は、現在のものとは、違っているように思えます。

ここで注意すべきことは、Diophantaus が、方程式の解として認めているのは、定方程式にしろ不定方程式にしろ、正の整数またはその比で表される正の有理数までだということです。現在では、特に議論されることもなく、学校などでも、無理量も、負の量も扱われています。これは、この当時、やはり、代数学（手続き（アルゴリズム）を問題にした）とはいえ、現実からかけはなれた数字を扱うことは無かったということなのではないでしょうか？生徒たちが無理数や負の数を扱うには、かなりの抵抗感を持ってしまうことが現在でもあるのは、やむを得ないことだと思えてきます。また、現在の我々から見ると、実数から整数や自然数に制限することで出てくる、特有の性質は、Diophantaus の時代から見ると、実は、自然なことだったのではないかと思えてきます。余談になりますが、与えられた数が無理数か有理数かを証明するのははなかなか難しいようです。π や e が無理数、特に超越数（整数係数の一元方程式の解にならない無理数）だということを証明できたのは 19 世紀になってからです。

3. Fermat の生涯と業績

ギリシャ数学が衰退したあと、十数世紀を経て、17世紀になると Fermat が登場します。彼の生涯は次のようなものでした。1601 年 8 月 17 日（月）にフランスの南部ロマーニュ地方のボーモンという町に生まれました。父親は裕福な革商人であり、町の領事をしていました。1620 年代後半にボルドーに移り法律を勉強して、1630 年代には法律（民法）で学位を取得しました。その後、故郷近くのトゥールーズで弁護士をし議会の議員を勤め、1665 年 1 月 12 日（木）に亡くなるまでトゥールーズ・ボーモン・キャッストルで法律と議会の仕事をしました。1630 年代に議会の仕事を始めた頃、名前を Pierre Fermat から Pierre de Fermat としています。Fermat には、言うまでもありませんが、FLT 以外にも、数学や物理などに多くの業績があります。微積分の先駆的な研究には、極大・極小問題を考察しているものがあります。また、Diophantus の Arithmetica（Bachet のラテン語翻訳）の余白に書き込んだ 48 の数論的コメントは、後世の数学発展に、大きく貢献しました。ただし、FLT 以外は 18 世紀までには、あらかた解かれていたようです。しかし、彼の成果はそればかりではありません。無限降下法(Fermat は「私の方法」と称しました）といわれる数学的帰納法（の原理）を使って多くの事実を証明しました。自然数は任意の部分集合に最小の要素を含むことから、無限に同じ操作を繰り返して小さくなっていく数の系列を構成することにより矛盾を導と言う手法で成果をあげました。さらに、解析幾何学にも大きな発展を与えました。現在我々が利用している座標平面は、デカルト座標といわれることが多いようですが、Fermat の座標を使った方法の方がより現代的です。数学 C で扱われる、2次曲線の標準形は Fermat によるものだといわれています。その他、光学における Fermat の原理(「光は進むのにかかる時間が最小になる経路を通る」という原理）は特に有名です。このようにその当時の最高の知識技術を元に古い時代の成果を書き直すという方法で様々な業績を上げているように思います。しかも、本職は法律家であり官僚でしたから、どう全てのことをこなしていたのかを考えるとやはり常人ではないと思います。

4. Fermat 以後

Fermat の死後、Bachet が翻訳した Diophantus の

Arithmetica への書き込みは、息子の Samuel により 1670 年「欄外書き込み集」として公刊されました。その多くに証明を与え、さらに新しい方法を数論に持ち込んだのは、Euler でした。ここでは、そのほんの一部を概観します。

Euler は 1707 年 4 月 15 日（火）にスイスのバーゼル近くで生まれました。父親は牧師で、彼にもその職を継がせようとバーゼル大学で神学を学ばせますが、そのときの数学教授であったヨハン・ベルヌーイの講義に魅せられ、数学を勉強し始めます。17 歳で修士号を取る程の早熟の天才で 20 歳でロシアのサンクトペテルブルグで物理学教授に就任しています。一時ドイツ（当時はプロイセン）のベルリン科学アカデミーに国王フリードリッヒ大王に招聘されますが、ロシアのペテルスブルグに戻り最後までそこで暮らすことになります。亡くなったのは 1783 年 9 月 18 日（木）ロシアのサンクトペテルブルグでのことでした。一生涯精力的な研究を続け、18 世紀においては、もっとも多くの成果・業績を上げた数学者・物理学者・天文学者とされています。さて、FLT に関する直接の成果は、n=3 のときに証明を与えています。数論の分野では、その他に、無限級数・無限積を利用して ζ 関数を発見し、それを駆使して、素数が無限にあることの別証明(Euclid の与えた証明)を与え、さらに、当時「バーゼルの問題」と言われた、平方数の逆数の無限和の値を求めることに成功しました。その結果 ζ(2n)の値を全て求めるなど、解析的な手法を数論に持ち込んで、大成功を修めています。ζ 関数の関数等式を見出し、整数の新しい研究方法を提供したと言うことになるのではないでしょうか。その他、上述しましたが、Euler の全業績は、ここになど書きれません。

続いて Lagrange です。1736 年 1 月 25 日（日）イタリアのトリノ生まれです。その後ドイツ（当時はプロイセン王国）でフリードリッヒ大王の下、ベルリン科学アカデミーで50歳位まで過ごし、フランスでナポレオンの下科学アカデミーで最後を迎えます。あの悲劇の王妃マリーアントワネットに数学教育を施し、フランス革命を経験し、度量衡の基本であるメートル法作成の中心人物であり、ナポレオンに仕えたことでも有名です。実に激動の時代を生きた Euler と並ぶ、大変偉大な数学者・物理学者・天文学者です。Euler より 30 歳程若いのですが Euler に代わってプロイセンのフリードリッヒ大王に招聘されベルリン科学アカデミーに、Euler の後継者として赴任します。1766 年のことです。その後 20 年ほどベルリンで過ごし、フリードリッヒ大王の死とともにフランスの科学アカデミーに移って研究を続けました。ナポレオンボナパルトの下、元老院議員・伯爵となり、エコールポリテクニーク（ポリテクと日本では呼ばれます）の教授を勤めました。ポリテクはナポレオンにより軍幹部育成のために創設された学校です。今日でもフランスのエリート養成学校（グランゼコール）として知られています。その後もフランスで生活し、1813 年 4 月 3 日（土）、Ordre Impérial de la Réunion の Grand Croix を受賞、その一週間後 1813 年 4 月 10 日（土）に亡くなっています。FLT に直接関わるような数学的業績はないものの、数論や代数学全般に関わる重要な業績があります。数論では、2次形式の理論的解析（これらは、全てベルリンの科学アカデミー時代の 1767 年から 1778 年の間に行われたものです）、代数学では、5次方程式の解の公式を導くための試みを検討します。これは、その後にアーベルやガロアらによる、5次方程式の解の代数的不可解性、群論の発生へと進んでいきます。

Lagrange は、直接 FLT への貢献をしていませんが、数論を積極的に研究し、多くの成果を上げました。Lagrange がフランスで活躍していた頃、大変有能なフランス人女性 Sophie Germain が彼を訪ねます。その当時、女性が学問・研究をするのは、大変困難でしたが、大変優秀だったために、Lagrange に見出されました。そのいきさつは以下の通りです。彼女は、エコールポリテクニークで Lagrange に教えを乞うために自分の論文を男性名 M.LeBlanc として送っています。Lagrenge は、その論文の独創性と洞察力のゆえに、作者 M.LeBlanc を探しますが、実は、女性であることがわかります。しかし、そのことには構わず、数学研究に対する経済的援助やアドバイザーを自らかってでるのでした。ここから、有能なフランス人女性数学者 Sophie Germain が誕生します。そして彼女は FLT 解決への重要な貢献をします。それは、それまで、FLT の証明は、個別の n について行われてきました。しかし、彼女は始めて"組織的"な n について FLT の証明を行いました。具体的には、「FLT が、n=5 の場合に成り立たなかったとするとその自然数解はすべて 5 で割り切れなければならない」（Sophie Germain の定理）と

いうものです。素数 p に対して 2p+1 も素数になるよな p をジェルマン素数といいます。5 はジェルマン素数です。Sophie Germain 自身は、100以下のジェルマン素数に対して、FLT が正しいことを確認しています。指数 n と FLT の反例を結びつけての成果は全く彼女の独創でした。Sophie Germain は、女性であるという当時としては、学問研究には大変なハンデをその才能故に乗り越え、大変大きな進歩を FLT 解決にもたらしました。その後、これをさらに一般化し Legendre は、FLT についての組織的研究をすすめます。Lagrange にアドバイスや援助を受けた後、Gauss に論文を送りその才能を認められます。このときも、やはり、その論文を公正な目で評価してもらうために、M.LeBlanc になっています。Gauss も大変に驚嘆し"この男"と書簡のやりとりをします。Gauss は 1804 年～07 年までの 4 年間女性だということには気づきませんでした。才能に気づき、惜しみない援助をしたのは、彼女が女性だとわかった後も変わりませんでした。1831 年 6 月 27 日(月)
乳癌の闘病の後、Sophie Germain は 55 歳で亡くなりました。Gauss がゲッチンゲン大学から彼女に名誉学位を与えられることを確信する寸前でした。

Sophie Germain の後、19 世紀半ばから、FLT における進展はさらに大きな転換を向かえます。Germain の示した方向に、Kummer の登場により、さらに流れが加速されていったように見えます。Kummer は 1810 年ドイツ（当時はプロシア）のソラウに生まれました。父親は物理学者でしたが、3 歳のときになくなっており、母親が彼とその兄を育てました。数学的な才能には恵まれていたものの、始めは、ギムナジウム（日本の中学から高校）で教鞭を取ります。自分の母校のドイツのソラウやポーランドのレグニカで 12 年ほど教職についていました。その後は Dirichlet の後任としてベルリン大学教授となり、有名なイデアル数を導入して、FLT に大きな進展をもたらしました。その経緯は以下の通りです。このころ、Lamé が複素数（1 の p 乗根）を使って FLT の等式の両辺を見比べるという方法で決着を付けようとしました。しかし、複素数に対する素因数分解が通常の整数のときと同じようには成り立たないという事実から、その方法では、破綻をきたすことが、Dirichlet や Liouville などにより指摘されました。この素因数分解の一意性が成り立たないという問題を解決するために、Kummer は精力を傾けます。そして、イデアル数という考えに到達します。それを使って彼は、ある種の素数（正則な素数 p：ある奇素数pが Bernoulli 数、$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{(p-3)/2}$ いずれの分子も割り切らない）については FLT が正しいことを示します。

(Kummer の定理)
pが正則素数のとき、p 次の FLT は正しい

ここから現代の代数学では、なくてはならない概念であるイデアル論が生まれます。

5. 20 世紀 Taniyama-Wiles の時代

19 世紀末までの、個々の指数 n について FLT を証明することには限界が見えてきました。kummer の画期的アイデアでさえも、それだけでは、完全解決にはほど遠いと言う状況でした。20 世紀に入り、Kronecker Dedekind・Hirbert らの流れから、抽象代数が花を開き、FLT 完全解決へ向けての歩みが始まります。

埼玉県は騎西町の出身である Y.Taniyama はそんな進展を迎えている整数論の研究に没頭し、あっという間に駆け抜けていった数学者でした。（詳細については、多くの本がでたり、Web にありますのでそちらを参照してください。）G.Shimura や Weil との出会いが彼を飛躍させたはずですが、最後は自らの手で命を絶つという結末を向かえることになります。その Taniyama が 1955 年東京・日光代数学シンポジウムで提出した問題は、Wiles が FLT を完全解決するのに、部分的に証明を果たした Taniyama-Shimura-Weil 予想（1999 年完全に証明されたそうです）です。最後にその原型の一部を載せることでこのノートを終えることにします。

『C を代数体 k 上で定義された楕円曲線とし k 上 C の L-函数を $L_c(s)$とかく： $\zeta_c(s)=\dfrac{\zeta_K(s)\zeta_K(s-1)}{L_C(s)}$ は k 上 C の zeta 函数である。もし、Hasse の予想が $\zeta_c(s)$ に対して正しいとすれば、 $L_c(s)$ より Mellin 逆変換で得られる Fourier 級数は特別な形の-2 次元の aoutomorphic form でなければならない。(cf.Hecke) もしそうであればこの形式はその aoutomorphic function の体の楕円微分となることは非常に確からしい。

さて、C に対する Hasse の予想の証明は上のような考察を逆にたどって、 $L_c(s)$ が得られるような適当な aoutomorphic form を見出すことによって可能であろうか。』