5－①　（第５部会　一般）

和　算　家　の　考　え　方　　そ　の　四

― 近似分数と零約術 ―

埼玉県立小川高等学校　教諭　松本　登志雄

はじめに

和算では無理数という概念がない、といえば言いすぎだが和算家はあらゆる数を分数で表すことにかなり精力を注ぎ込んでいる。無理数論と言うような抽象的な概念は、和算が趣味として情緒的な雰囲気で研究されており、天才の直観が重視されていたので、論理学的な考察方がうまく育たず、何々論、といった学問に発達しなかった。

しかし、無限小数を近似分数に直すという数学的技法には現代から見ても正しく、またかなり緻密な計算がなされている。これらの個々の問題に関して和算家の手法を見るだけでも我々の数学的思考に資するものがあると信ずるのである。

１　円周率の近似分数

円周率の近似値として日本では古来三を用いていた。しかし、戦国時代の頃から次第に三一六という値が用いられるようになってきた。この値がどのような経路で使われるようになったのかは不明である。江戸時代初期にはこれが $\sqrt{10}$ であるという理由付けが、弧矢弦の術の渡来によってなされた。

この辺の考察については「平成13年８月７日　第83回全国算数・数学教育研究(埼玉)大会　和算についてのいくつかの話題」に述べておいた。この要点を上げておく。

円法七九について

和算では円の面積を求める際直径の自乗に掛ける係数を円法と呼び、初期の頃には0.79で、円周率は3.16であった。これは日本独自といって良い値で、中国の算書にもこの値はほとんど見られない。

Ⅰ．孤矢弦の式による $\sqrt{10}=3.1623$ との関連

唐順之の「孤矢論」は1550年頃に出ており、顧應祥は1502年に『孤矢算術』を書いているがこれらの影響で円法七九が出てきたとは思えない。少なくとも、『諸勘分物』の田積計算における円法八は、それ以前から行われた実際の検地に関する換算率を継続しているように見える。また、今村知商は『竪亥録』序文で、円弦之術（径矢弦、弧矢弦）は独力で得たことを記している。しかし今村の師毛利重能は『割算書』において円法七九を使用している。このことは弧矢弦之式を知る以前から円法が七九であったことの傍証となる。

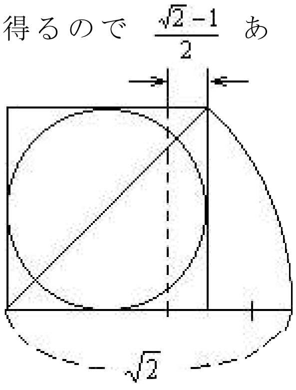
Ⅱ．　円法七九が日本独自のものであること

検地の面積計算は即ち土地からの収穫高を見積もることを意味する。江戸以前からの検地の方法によれば、全て田の面積は矩形に見積もっていた。つまり、「丸き田」であれば、縦を径、横には径にある定数（円法）を掛けたものを二辺とする方形の面積をもって、その「丸き田」の面積としていたのである。このことは現在我々が、半径ｒの円の面積を πr^2（半径の二乗掛ける円周率）という風に理解しているのとは、違って、どちらかというと $2r\times(2r\times$円法$)$（即ち、縦（直径）掛ける横（円法掛ける直径で換算した長さ））という感じが強い。律令制時代の面積計算は『九章算術』の計算以上だとは思えないから、円周率は三である。これが長い間、検地の際の面積計算に使われていた。直径を d とおき、円の面積を計算すると結果は $d\times\left(\frac{3}{4}d\right)=\frac{3}{4}d^2$ となり、実際の面積よりもかな

り小さい。これでは領主は年貢の取分が大分少ない。周を用いて計算すると$\frac{\pi}{3}d$が直径となるので、円の面積は$\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}d\right)^2=\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{3}d^2$となり、かなり大きい値を得る。このときの円法は$\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{3}\approx 0.82247$となる。これは領民の負担が重過ぎる。従って、$(0.75+0.82)\div 2=0.785$　とすると、これはほぼ$\frac{\pi}{4}$に等しい。よって、0.79程度の値が円法として適当と推定出来る。

Ⅲ.　円法七九の候補

円形の田の面積を矩形の田の面積に換算する率としての円法は弧矢弦之術などの高度な算術によるものでなく、よく知られた値で表されるものでなければならない。『諸勘分物』はかなり古い形の算術を残しているように思われるが、$\sqrt{2}$などの値に関する記述は見える。ある程度の開平計算については理解していたと考えられる。ただし、『諸勘分物』の近似の程度は$\sqrt{2}=1.4$　といった荒いものである。図のように、直径1の円とそれに外接する正方形の対角線と直径に注目し、縦を1、横を$1-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$とする長方形の面積で円の面積を換算することにする。この換算値は$\sqrt{2}$の値を1.4で近似すれば、『諸勘分物』のように0.8を円法として得られる。また、$\sqrt{2}=1.42$で近似すれば、0.79を得るので　$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　ある。



偶然の一致と思うが、円法七九あるいは八が使用されていたところに、『算法統宗』の輸入などで、「弧矢弦の術」が知られるようになり、$\pi=\sqrt{10}$とすることが認められた。これを『竪亥録』が取上げ、円法七九を正当とする根拠となっていったのであろう。

２　零約術

関孝和の『括要算法』には円周率の近似分数をを次のような値とし、名前を付けたものがある。

	周率	径率	周数
古法	三	一	三整
密率	二十二	七	三一四二八五七一四三弱
智術	二十五	八	三一二五整
桐陵法	六十三	二十	三一五整
和古法	七十九	二十五	三一六整
陸績率	一百四十二	四十五	三一五五五五五五五五五五六弱
徽術	一百五十七	五十	三一四整

そして関は「定率」として、百十三分の三百五十五を得ている。

関は円周率を正2^{15}角形、正2^{16}角形、正2^{17}角形の周を計算して、これを順にa,b,cとして、増約術（現代の言葉では等比級数の和を求めること）により、$\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}+b$に相当する値を三尺一寸四分一厘五毫九絲二忽六微五繊三沙五塵九埃微弱と得て、これを定周と呼んだ。そしてこの定周（円周率）に対して近似分数を求めるのに次のような方法を考えた。

「始関氏零約ノ術ヲ用ルニ徑一周三ヲ累加シテ各径周ノ率トシ毎ニ徑率ヲ以テ周率ヲ除シ得ル所ノ数定周ヨリ少キニ到ルトキハ徑一周四ヲ加逐一ニ是ヲ求ム賢明其術ノ煩キヲ厭テ本術ヲ探リ設タリ是亦首ヨリ本術ヲ察スルニ非ス先逐一ニ求ル術ヲ用テ後玄ク探テ眞法ヲ会セリ」これは『綴術算経』の中の一節であるが、関孝和の零約術（無限小数を近似分数に直す方法）を端的に表している。

すなわち、まず直径を1とし、周を3とする。周÷直径＝3は π よりも小さい。したがって、次には直径には1、周には4を加えたものを近似値とする。つまり、直径2周7である。これは周÷直径＝3.5となり π より大きい。したがって次は直径に1を加えて、周には3を加える。直径3周10となる。再び、周÷直径＝3.333…は π よりも

大きいので直径に1を加えて、周には3を加える。直径4周13ゆえ、周÷直径＝3.25でπより大きい。よって、直径5周16とし、3.2。直径6周19とし、3.1666…。直径7周22とし、3.14285714…。これが関の言う密率である。実は祖冲之は密率を百十三分の三百五十五、約率を七分の二十二としていたのだが、これが本邦に誤って伝わってしまったのである。

以上が関の零約術であるが、建部賢弘は兄の賢明が初めは関の素朴な方法を使っていたが、後に真法を見つけたと記述している。これが次に紹介する連分数展開による零約術である。

３　連分数展開による零約術

「元数一ヲ置即尺ノ位ト定ム以テ定周ヲ除テ毎ニ少ヲ以テ多ヲ除也得商ト不盡ヲ第一トス第一ノ不盡ヲ以テ元数一ヲ除テ得商ト不盡ヲ第二トス第二ノ不盡ヲ以テ第一ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ第三トス第三ノ不盡ヲ以テ第二ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ第四トス第四ノ不盡ヲ以テ第三ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ第五トス如クレ此ノ其ノ段ノ不盡ヲ以テ前ノ段ノ不盡ヲ除テ逐商ヲ求ム〇元数ノ一ヲ徑率トシ第一ノ商ヲ周率トス是ヲ一等ノ弱率トス第二ノ商ヲ以テ一等ノ徑周率ニ乗シ周率ニ元数ノ一ヲ加ヘテ二等ノ強率トス第三ノ商ヲ以テ二等ノ徑周率ニ乗シ一等ノ徑周率ヲ加テ三等ノ弱率トス第四ノ商ヲ以テ三等ノ徑周率ニ乗シ二等ノ徑周率ヲ加テ四等ノ強率トス如クレ此ノ逐テ次商ヲ以テ其等ノ徑周率ニ乗シ前ノ等ノ徑周率ヲ加テ次ノ等ノ徑周率トシテ強弱漸親ノ率ヲ求ム其零約ノ諸率ノ数載ルニ干円率ニ一故今畧レ此」。

これは次のようにすることである。

定周を3.14159265359とする。このとき、

$$\text{定周}=3+0.14159265359$$

$$=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.14159265359}}$$

であるから、

$$\frac{1}{0.14159265359}=7+0.062513305970\cdots$$

したがって、$\text{定周}=3+\dfrac{1}{7+0.062513305970}$ となる。ここで小数を無視すれば、円周率の近似分数を $\dfrac{22}{7}$ と得る。

さらに、$\dfrac{1}{0.062513305970}=15+0.99659439671\cdots$ であるから、これを16と見て、定周の近似分数を計算すると、$\text{定周}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=\dfrac{355}{113}$ を得ることになる。密率が、たった二度目の近似で得られるのである。これはすばらしく優秀な方法であるといえる。

４　平方根の近似分数

平方根の近似分数についても関の零約術によって求めることが出来る。しかし、これは近似分数を求めるのに、平方根の小数表示を計算しなければならない。これは二度手間になり、煩わしい。そこで、久留嶋義太は平方根の近似分数を直接求めることができる「平方零約術」を発明した。

久留嶋義太については天才的な数学者であることが伝えられているが、また奇行の人としても有名である。とにかく酒好きであったらしい。また、自分の研究を他人に見せる、といった考えは全くなかったようで、自分が興味を持った問題が解決できるとそれで満足し、その結論をまとめて置くというようなことは皆無で、整った形の著作はまったくない。

さて、$\sqrt{P}=\dfrac{p_n}{q_n}+\varepsilon$ と書けたとする。

ε を移項して、平方すると、

$$\left(\sqrt{P}-\varepsilon\right)^2=P-2\varepsilon\sqrt{P}+\varepsilon^2=\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2$$

ゆえに、

$$\sqrt{P}=\frac{P-\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{Pq_n{}^2-p_n{}^2}{2\varepsilon\cdot q_n{}^2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

となる。したがって、$p_{n+1}=Pq_n{}^2-p_n{}^2$, $q_{n+1}=2\varepsilon\cdot q_n{}^2$ とすれば、これは最初のものより近似の度合いが高い。これが久留嶋の平方零約術の骨子である。

実際に久留嶋の方法によって、$\sqrt{3}$ を計算してみる。（『久留嶋義太の業績』を参考にする。）

甲術 $\sqrt{P}=\sqrt{3}\approx\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{1}{1}=$甲弱数 $(p_1=q_1=1)$,

$原実=P-p_1{}^2=2$, $原法=2p_1=2$

乙術 $\dfrac{原実}{原法}=\dfrac{P-p_1{}^2}{2p_1}=\dfrac{2}{2}=1(段数)+0(段余)$,

$原実-段余=2p_1-0=2=乙実$,

$$\frac{乙実\times段余+原法}{原法}=\frac{2\times0+2}{2}=1=乙強数$$

$段数\times甲分母=1\times1=1=乙分母$

$段数\times甲分子+甲分子=1\times1+1=2=乙分子$

丙術 $\dfrac{乙実}{乙強数}=\dfrac{2}{1}=2(段数)+0(段余)$,

$原実-段余=2-0=2=丙実$,

$$\frac{丙実\times段余+原法}{乙強数}=\frac{2\times0+2}{1}=2=丙弱数$$

$段数\times乙分母+甲分母=2\times1+1=3=丙分母$

$段数\times乙分子+甲分子=2\times2+1=5=丙分子$

丁術 $\dfrac{丙実}{丙弱数}=\dfrac{2}{2}=1(段数)+0(段余)$,

$原実-段余=2-0=2=丁実$,

$$\frac{丁実\times段余+原法}{丙弱数}=\frac{2\times0+2}{2}=1=丁強数$$

$段数\times丙分母+乙分母=1\times3+1=4=丁分母$

$段数\times丙分子+乙分子=1\times5+2=7=丁分子$

・・・・・ 以下この手順を繰り返す。

「甲術曰置原積平方開之適商為分子以一為分母不尽名曰原法是甲段之弱数也倍分子為原実
乙術曰置原実以原法除之商為段数不尽為段余以減原実余為乙実以段余乗之加原法以原法除之為乙強数以段数乗甲分母為乙分母又以段数乗甲分子加一箇為乙分子
丙術曰置乙実以乙強数除之商為段数不尽為段余以減原実余為丙実以段余乗之加原法以乙強数除之為丙弱数以段数乗乙分母子加甲分母子為丙分母子次第如此得逐段分母子」が原文である。

このようにして得られた近似分数は、

$\dfrac{1}{1}, \dfrac{2}{1}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{19}{11}, \dfrac{26}{15}, \dfrac{71}{41}, \cdots$ となる。これを小数で表現すれば、次のようになる。

$1, 1.\dot{6}, 1.75, 1.\dot{7}\dot{2}, 1.7\dot{3}, 1.\dot{7}317\dot{0}, \cdots$

強弱交代しながら振動収束することがわかる。

まとめにかえて

和算家の研究が今日の我々の知識から見てもすばらしいものであることはご覧の通りである。ただ、久留嶋のように、自分の研究をまとめ体系化する、といった思考は和算家にはなかった。（私の発表もその例にもれない。）

結局和算は六芸の一つ、趣味、道楽の域を出なかったと考えて良い。これは自然科学の発達のなかった日本では仕方のないことであった。しかしながら、個々の話題については我々も学ぶべきものがあるし、その考え方は今日でも十分に通用するものがある。特に和算家の幾何学的な直観力についてはこれを賞賛しこそすれ、批判がましいことはいえない。

今後もこれらの話題のいくつかについて述べる機会に恵まれることを希望してまとめにかえたいと思う。

参考文献

『綴術算経』享保七年(1722)建部賢弘(内閣文庫)
　同　　下平和夫写
『括要算法』正徳二年(1712) 関孝和　(京都大学)
『関孝和全集』昭和 49 年　　　　大坂教育図書
『安島直円全集』昭和 41 年富士短期大学出版部
『久留嶋義太の業績』昭和 48 年　加藤平左エ門
『円周率の歴史』昭和 55 年 平山　諦